Exercice :

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 \in IR \\ U_{n+1} = U_n^2 - 5U_n + 9 \ ; \ n \in IN \end{cases}$

1°) Montrer que la suite U est croissante.

2°) Montrer que si la suite U est convergente alors elle a pour limite 3.

3°) On suppose que $U_0 \in]2 ; 3[$.

a) Montrer que pour tout $n \in$ IN, on a : $2 < U_n < 3$.

b) En déduire que la suite U est convergente et préciser sa limite.

4°) On suppose que $U_0 \notin [2 ; 3]$.

a) Montrer que $U_1 > 3$.

b) Montrer que la suite U est divergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

5°) Que peut-on conclure pour la limite de la suite U dans le cas où $U_0 = 2$.

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 5U_n + 9 - U_n$

$= U_n^2 - 6U_n + 9$

$= U_n^2 - 2 \times 3 \times U_n + 3^2$

$= (U_n - 3)^2 \geq 0$

Donc (U_n) est croissante

2°) On pose $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = l \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n^2 - 5U_n + 9 = l$